应用随机过程 笔记

1. 概率论基础知识

1.1. 概率

- 样本空间 Ω，其元素称为样本点 ω，子集称为事件 A;
- Ω 的一些子集构成集类 $\mathcal{F}$。$\mathcal{F}$ 若对于补和可列并封闭，则称为 σ 代数，$(\Omega, \mathcal{F})$ 称为可测空间;
- 概率 P 是 $\mathcal{F}$ 上满足非负性、归一性、可列可加性的函数。$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 称为概率空间。

1.2. 随机变量

- $X: \Omega \to \mathbb{R}$，满足 $\forall a \in \mathbb{R}, \{\omega | X(\omega) < a\} \in \mathcal{F}$。
- 分布函数 $F(x) = P[X \leq x]$，其中 $\{X < x\}$ 的意思是 $\{\omega | X(\omega) < x\}$。

给定随机变量 X 可以生成 Ω 上的 σ 代数，即包含所有形如 $\{X \leq a\}, a \in \mathbb{R}$ 的最小 σ 代数，记作 $\sigma(X)$。同样可以定义 $\sigma(X_1, \cdots, X_n)$。生成的 σ 代数表示由 $X_1, \cdots, X_n$ 完全决定的事件，在后面的停时中会用到。

1.3. Riemann-Stieltjes 积分

设 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调不减、右连续，$g(x)$ 连续，则 $g(x)$ 关于 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 R-S 积分为（分割、取点、求极限的定义方式和黎曼积分相同）

$$\int_a^b g(x) \mathrm{d}F(x) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_i g(u_i) \Delta F(x_i)$$

R-S 积分满足区间可加性、线性性（对 f 和 g 都线性）。

若 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导，则 $\int_a^b g(x) \mathrm{d}F(x) = \int_a^b g(x) f(x) \mathrm{d}x$ 。

1.4. 随机变量的数字特征

- 数学期望：若 $\int_{\mathbb{R}} |x| \mathrm{d}F(x)$ 存在，则

$$\mathrm{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x \mathrm{d}F(x)$$

- 方差： $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2$，协方差： $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y)]$
  - $\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2 \mathrm{Var}(X) + b^2 \mathrm{Var}(Y) + ab \mathrm{Var}(X) \mathrm{Var}(Y)$。
  - $|\mathrm{E}(XY)|^2 \leq \mathrm{E}(X)^2 \mathrm{E}(Y)^2$。
- k 阶矩：原点矩 $\mathrm{E}(X^k)$，中心矩 $\mathrm{E}((X - \mathrm{E}X)^k)$。

1.5. 重要函数和变换

- 矩母函数

$$\psi(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX}) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{tX} \mathrm{d}F_X(x)$$

  矩母函数的重要性质是：若 X 的 k 阶矩存在，则 $\mathrm{E}(X^k) = \psi^{(k)}(0)$。

- 特征函数

$$\phi(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tX} \mathrm{d}F_X(x)$$

  若分布函数 $f(x)$ 存在，则 $\phi(x)$ 就是 $f(x)$ 的傅立叶变换。

1.6. 收敛性

对于随机变量序列 $\{X_n\}$ 及其分布函数 $\{F_n(x)\}$，定义以下收敛方式

- 几乎必然收敛：$P[\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X] = 1$，记作 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$；
- 依概率收敛：$\forall\epsilon, \lim\limits_{n\to\infty} P[\,|X_n - X| < \epsilon] = 1$，记作 $X_n \xrightarrow{P} X$；
- r 阶矩收敛：$\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}(|X_n - X|^r) = 0$，记作 $X_n \xrightarrow{L^r} X$；$r = 2$ 时称为均方收敛；
- 依分布收敛（弱收敛）：$\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$，记作 $X_n \xrightarrow{d} X$。

四种收敛的关系：

$$
\begin{array}{ccccc}
\xrightarrow{L^s} & \underset{s>r\geq1}{\Rightarrow} & \xrightarrow{L^r} & & \\
 & & \Downarrow & & \\
\xrightarrow{\text{a.s.}} & \Rightarrow & \xrightarrow{p} & \Rightarrow & \xrightarrow{d}
\end{array}
$$

2. 随机过程

2.1. 随机过程的定义

随机过程是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一族随机变量 $\{X(t,\omega), t \in T\}$。

$X(t,\omega)$ 也可写成 $X_t(\omega)$、$X(t)$ 或 X_t，其所有取值构成状态空间 $\mathcal{S}$。

2.2. 随机过程的数字特征

- 协方差函数 $\gamma(s,t) = \mathrm{Cov}(X(s), X(t))$ 和自相关函数 $R_X(s,t) = \mathrm{E}(X(s)X(t))$

  二者满足 $R_X(s,t) = \gamma(s,t) + \mu_X(s)\mu_X(t)$
- 同样也可以定义互协方差函数 $\gamma_{XY}(s,t) = \mathrm{Cov}(X(s), Y(t))$ 和互相关函数 $R_{XY}(s,t) = \mathrm{E}(X(s)Y(t))$

2.3. 常见类型的随机过程

- 独立增量过程：对任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，有 $X(t_i) - X(t_{i-1})$ 相互独立。若 $X(t_i) - X(t_{i-1})$ 只与 $t_i - t_{i-1}$ 有关，则称有平稳增量。
- 马尔可夫过程：将来的状态只与现在有关，而与过去无关（条件独立）。
- 二阶矩过程：方差函数永远存在。
- 平稳过程：
  - 宽平稳过程：均值不变，协方差 $\mathrm{Cov}(X_t, X_s)$ 只与 $t-s$ 有关。
  - 严平稳过程：$(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))$ 与 $(X(t_1+h), X(t_2+h), \cdots, X(t_n+h))$ 有相同的分布。
- 鞅：$\mathrm{E}(X(t_{n+1})|X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)) = X(t_n)$。
- 更新过程：X_k 独立同分布，$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$，则 $N(t) = \max\{n | n \geq 0, S_n \leq t\}$ 为更新过程。
- 点过程（计数过程）：$\{N(A), A \subset T\}$ 取值非负整数，$N(\varnothing) = 0$，当 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ 时有 $N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2)$。

2.4. σ 代数流

对于概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$，$\{\mathcal{F}_t\}$ 代表 $\mathcal{F}$ 的一系列子 σ 代数，且满足 $\{\mathcal{F}_t\}$ 非降，即对于 $\forall t_1\le t_2$ 有 $\mathcal{F}_{t_1}\subseteq\mathcal{F}_{t_2}$，则称 $\{\mathcal{F}_t\}$ 为一个 σ 代数流。有时 $\{\mathcal{F}_t\}$ 也指对应的随机过程生成的 σ 代数流，即 $\mathcal{F}_t=\sigma(X(s),0\le s\le t)$。

σ 代数流 $\{\mathcal{F}_t\}$ 代表了随机过程截至时间 t 所积累的信息，即是一个信息流。若一个随机变量 X 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的，是指对于 Borel 集的元素 $A\in\mathcal{B}$，有 $\{\omega\in\Omega|X(\omega)\in A\}\in\mathcal{F}_t$。这表示 X 完全由 t 时间及以前的信息所决定。

3. 泊松过程

3.1. （时齐）泊松过程的定义

泊松过程 $N(t)$ 指时间 t 以内发生事件的个数，发生的速率为 λ。

泊松过程是具有独立增量和平稳增量的计数过程，定义为满足：

1. 计数过程，且 $N(0)=0$;
2. 独立增量;
3. $N(t+s)-N(s)$ 服从参数为 λt 的泊松分布。

等价定义：

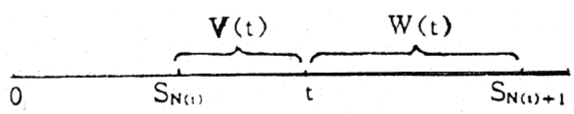
1. 计数过程，且 $N(0)=0$;
2. 独立平稳增量;
3. 对 $\forall t>0$ 和充分小的 Δt 有 $P[N(t+\Delta t)-N(t)=1]=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$, $P[N(t+\Delta t)-N(t)\ge 2]=o(\Delta t)$。

3.2. 泊松过程的重要性质

定义 S_n 是第 n 个事件的到达时间，$X_n=S_n-S_{n-1}$ 是时间间隔，则有

- $\{X_n\}$ 独立同服从参数为 λ 的指数分布;
- $\{S_n\}$ 服从 $\Gamma(n,\lambda)$。

定义年龄 $V(t)$ 和剩余寿命 $W(t)$，则有



- $W(t)$ 与 X_n 同分布，即满足参数为 λ 的指数分布（无记忆性）；
- $V(t)$ 满足 “截尾” 指数分布，即

$$P[V(t)\le x]=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{\lambda x}, & x\in[0,t)\\ 1, & x\in[t,+\infty)\end{cases}$$

到达时间 S_n 的条件分布

- 若已知事件在 $[0,t]$ 内只发生一次，则该事件的到达时间是 $[0,t]$ 上的均匀分布（平稳独立增量）。
- 若发生了 n 次，则到达时间的次序统计量的联合密度函数为

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\frac{n!}{t^n},\qquad 0<t_1<t_2<\cdots<t_n$$

注：对于 n 个独立同分布的密度函数为 $f(y)$ 的统计量 Y_k，其次序统计量的联合密度函数为

$$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=n!\prod_{k=1}^{n}f(y_k),\qquad 0<y_1<y_2<\cdots<y_n$$

以上除 $V(t)$ 的性质外都可以作为泊松分布的充要条件。

3.3. 泊松过程的检验与估计

泊松过程可以通过以下之一进行检验：

1. $\{X_n\}$ 独立同指数分布；
2. $W(t)$ 与 X_n 同分布；
3. $\forall t>0$ 且 $N(t)=1$ 时，S_1 满足 $[0,t]$ 上的均匀分布；
4. 给定 $t>0$ 且 $N(t)=n$ 时，$S_1,\cdots,S_n$ 与 $[0,t]$ 上的独立均匀分布的次序统计量分布相同。

参数 λ 的估计

- 极大似然估计：$\hat{\lambda}=n/T$；
- 区间估计：置信度为 $1-\alpha$ 的区间为

$$\left[\frac{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}{2S_n},\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)}{2S_n}\right]$$

3.4. 泊松过程的推广

非时齐泊松过程

非时齐泊松过程的定义与时齐泊松过程类似，但不要求平稳增量，强度 $\lambda(t)$ 随时间变化。

定义均值函数

$$m(t)=\int_0^t\lambda(s)\mathrm{d}s$$

则 $N(t+s)-N(t)$ 服从参数为 $m(t+s)-m(t)$ 的泊松分布。

非时齐泊松过程可以转化为时齐泊松过程：$M(t)=N(m^{-1}(t))$ 是强度为 1 的泊松过程。

复合泊松过程

设 $\{Y_i\}$ 独立同分布，$N(t)$ 为泊松过程，且二者独立，则

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$$

称为复合泊松过程。复合泊松过程的意思是：若某种事件的发生复合泊松过程，Y_i 表示每个事件的某种随机的广延量，则 $X(t)$ 表示时间 t 内所有事件的该参量的总量。

复合泊松过程的性质：

$X(t)$ 有独立增量；

$\mathrm{E}(X(t))=\lambda t\mathrm{E}(Y)$，$\mathrm{Var}(X(t))=\lambda t\mathrm{E}(Y^2)$。

条件泊松过程

若泊松过程的速率变成一个随机变量 Λ，对于给定的 $\Lambda=\lambda$ 时，$N(t)$ 是参数为 λ 的泊松过程，则 $N(t)$ 称为条件泊松过程。

条件泊松过程的全概率公式：若 Λ 的分布是 G，则长度为 t 的时间区间内发生 n 次事件的概率是

$$P[N(t+s)-N(s)=n]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{d}G(\lambda)$$

条件泊松过程的性质：

$\mathrm{E}(N(t))=t\mathrm{E}(\Lambda)$，$\mathrm{Var}(N(t))=t^2\mathrm{Var}(\Lambda)+t\mathrm{E}(\Lambda)$

4. 更新过程

4.1. 更新过程的定义

更新过程是指时间间隔 $\{X_n\}$ 独立同分布的计数过程。即 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$，$N(t) = \sup\{n|S_n < t\}$。

4.2. 更新过程的重要性质

到达时间 S_n 的分布

- 若 $\{X_n\}$ 的分布为 $F(t)$，S_n 的分布为 $F_n(t)$，则有

$$\begin{aligned} &F_1(t) = F(t), \\ &F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(t-s)\mathrm{d}F(s), \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

  即 $F_n(t)$ 是 $F(t)$ 的 n 重卷积，记为 $F_n = F_{n-1} * F$。
- $P[N(t) = n] = F_n(t) - F_{n-1}(t)$
- $\mathrm{E}(X_n)$ 记为 μ，有 $S_n/n \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu$

平均事件数目

- 更新函数定义为 $M(t) = \mathrm{E}(N(t))$，则有

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) < \infty$$

- $M(t)$ 满足更新方程

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-s)\mathrm{d}F(s)$$

- $m(t) = M'(t)$ 称为更新密度，满足更新方程

$$m(t) = f(t) + \int_0^t m(t-s)f(s)\mathrm{d}s$$

4.3. 更新方程

对于已知函数 $a(t)$ 和已知的分布函数 $F(t)$，关于未知函数 $A(t)$ 的更新方程是指

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-u)\mathrm{d}F(u)$$

若 $a(t)$ 有界，则更新方程的解唯一，为

$$A(t) = a(t) + \int_0^t a(t-u)\mathrm{d}M(u)$$

其中

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t), \quad F_n = F_{n-1} * F$$

4.4. 更新定理

- 更新过程下的 Wald 等式

$$\mathrm{E}\left(S_{N(t)+1}\right) = \mu(M(t)+1)$$

- Feller 基本更新定理

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{M(t)}{t}=\frac{1}{\mu}$$

定义格点分布：对于非负随机变量 X，若 $\exists d\geq 0$，使得 $\sum_{n=0}^{\infty}P[X=nd]=1$，其中满足此式的最大 d 称为 X 的周期，称 X 的分布函数 F 是格点的。

- Blackwell 更新定理

  F 是非负的分布函数，F_n 是 F 的 n 重卷积，$M(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)$，则

  - 若 F 不是格点的，则对 $\forall a\geq 0$，

    $$\lim_{t\to+\infty}[M(t+a)-M(t)]=\frac{a}{\mu}$$

  - 若 F 是格点的，周期为 d，则

    $$\lim_{n\to\infty}[M((n+1)d)-M(nd)]=\frac{d}{\mu}$$

- 关键更新定理（与 Blackwell 更新定理等价）

  若 F 是均值为 μ 的非负随机变量的分布函数，$a(t)$ 单调且绝对可积。对于更新方程

  $$A(t)=a(t)+\int_0^t A(t-u)\mathrm{d}F(u)$$

  $A(t)$ 是其解，则

  - 若 F 是非格点的，则

    $$\lim_{t\to+\infty}A(t)=\begin{cases}\frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty}a(t)\mathrm{d}t, & \mu<+\infty\\ 0, & \mu=+\infty\end{cases}$$

  - 若 F 是以 d 为周期的格点的，则对于 $\forall c>0$，有

    $$\lim_{t\to+\infty}A(t)=\begin{cases}\frac{d}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}a(c+nd), & \mu<+\infty\\ 0, & \mu=+\infty\end{cases}$$

4.5. 更新过程的推广

<u>延迟更新过程</u>

延迟更新过程是指 X_1 服从与其他 X 不同的分布 G。此情况下，更新函数变为

$$M(t)=\sum_{n=1}^{\infty}G(t)*F^{(n-1)*}(t)$$

此更新函数仍然遵循更新定理。

<u>更新回报过程</u>

假设每次更新的时候都伴随随机的回报 R_n，其中随机向量 (X_n,R_n) 独立同分布，但 R_n 可以依赖 X_n。则更新回报过程是指

$$R(t)=\sum_{t=1}^{N(t)}R_i$$

更新回报定理指出，若更新间隔 X_i 满足 $\mathrm{E}(X)<\infty$，每次更新的期望回报 $\mathrm{E}(R_i)<\infty$，则有

$$\frac{R(t)}{t}\xrightarrow{\text{a.s.}}\frac{\mathrm{E}(R)}{\mathrm{E}(X)}$$
$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{E}(R(t))}{t}=\frac{\mathrm{E}(R)}{\mathrm{E}(X)}$$

<u>交错更新过程</u>

一个系统有“开”(1) 和“关”(0) 两种状态，假设系统最初为“开”，且在 Z_1 时间后变为“关”，再在 Y_1 时间后变为开，Z_2 时间后变为关，如此往复。设 (Z_n, Y_n) 独立同分布，即 $\{Z_n\}$ 之间、$\{Y_n\}$ 之间独立同分布，但 Z_i 和 Y_j 在 $i=j$ 时可以相关。则系统的状态 $\zeta(t)$ 称为交错更新过程。

交错更新定理指出，若 $\mathrm{E}(Z_n+Y_n)<\infty$，且 Z_n+Y_n 不是格点的，则

$$\lim_{t\to+\infty} P[\zeta(t)=1]=\frac{\mathrm{E}(Z)}{\mathrm{E}(Z)+\mathrm{E}(Y)}$$
$$\lim_{t\to+\infty} P[\zeta(t)=0]=\frac{\mathrm{E}(Y)}{\mathrm{E}(Z)+\mathrm{E}(Y)}$$

5. 马尔可夫链

5.1. 马尔可夫链的定义

马尔可夫性是指未来只与现在有关，与过去无关。即对任意的状态 $i_0, i_1, \cdots, i_n, j$，有

$$P[X_{n+1}=j|X_0=i_0, X_1=i_1, \cdots, X_n=i_n]=P[X_{n+1}=j|X_n=i_n]$$

若马尔可夫链的初始状态 $P[X_0=i_0]$ 给定，则其统计特性完全由条件概率 $p_{ij}=P[X_{n+1}=j|X_n=i_n]$ 决定。

一个非常有用的结论是：若随机过程 $\{X_n\}$ 满足 $X_n=f(X_{n-1},\xi_n)$，其中 $\{\xi_n\}$ 为取值在 $\mathcal{S}$ 上的独立同分布随机变量，且 X_0 与 $\{\xi_n\}$ 相互独立，则 $\{X_n\}$ 是马尔可夫链，且 $p_{ij}=P[f(i,\xi)=j]$。

5.2. 转移概率

定义一步转移概率 $p_{ij}=P[X_{n+1}=j|X_n=i_n]$ 和 m 步转移概率 $p_{ij}^{(m)}=P[X_{n+m}=j|X_n=i_n]$。

定义转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$，$\boldsymbol{P}^{(m)}=(p_{ij}^{(m)})$，即

$$\boldsymbol{P}=(p_{ij})=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

则有 Chapman-Kolmogorov 方程

$$p_{ij}^{(m+n)}=\sum_{k\in\mathcal{S}} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

或

$$\boldsymbol{P}^{(n)}=\boldsymbol{P}^n$$

若系统在时刻 n 的分布为 $\boldsymbol{\pi}(n)$ （行向量），则 $n+1$ 时刻的分布为 $\boldsymbol{\pi}(n)\boldsymbol{P}$。

5.3. 停时与强马尔可夫性

设 $\{X_n, n\in T\}$ 是一个随机过程，τ 是一个取值于 $T\cup\{+\infty\}$ 的随机变量。若对于 $\forall n\in T$，事件 $\{\tau=n\}$ 完全取决于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，即 $\{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n=\sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n)$，则称 τ 是一个停时。停时的直观意义是，一个过程是否停止完全取决于该时刻前的信息。

强马尔可夫性是将马尔可夫性中确定的现在时刻 n 变为随机的停时 τ，仍然保持“未来与过去无关”的性质。即对于停时 τ，有

$$P[X_{\tau+1}=j|X_0=i_0, X_1=i_1, \cdots, X_\tau=i_\tau]=P[X_{\tau+1}=j|X_n=i_\tau]$$

可以证明，任何离散时间的马尔可夫链都具有强马尔可夫性。

5.4. 状态的分类

- 状态 i 可达状态 j （$i \to j$）：$\exists n \geq 0$ 使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$；互相可达称为互通，记为 $i \leftrightarrow j$；

  可以将根据是否互通将马尔可夫链分为多个类。只存在一个类的马尔可夫链称为不可约的。

  定义周期 $d = \gcd(\{n \geq 1 | p_{ii}^n > 0\})$，若 $d = 0$ 称为非周期的，$d > 0$ 称为周期的。属于同一个类的状态的周期相同。

- 常返：记 $f_{ij}^{(n)}$ 为从 i 经过 n 步后首次到达 j 的概率，$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$。$f_{ii} = 1$ 称为常返的。

  - $f_{ii}^{(1)} = 1$ 称为吸收的。

    两个常返态 i、j 之间满足 $f_{ij} = 1$。

  对于常返态 i，定义 $\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$ 为返回的平均步数。

  - 若 $\mu_i < \infty$ 称为正常返，$\mu_i = \infty$ 称为零常返；
  - 正常返 $\wedge$ 非周期 = 遍历。

  常返、非常返、正常返、零常返都是类性质。

  从状态 i 进入 j 次数的期望

  $$\mathrm{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}(X_n = j) \middle| X_0 = i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$$

  返回次数的期望：对于常返态为 $+\infty$，对于非常返态为有限，且等于 $1/(1 - f_{ii})$。

  对于两个常返态 i、j，从 i 进入 j 的次数的期望也为 $+\infty$。

状态空间分解定理：可以将状态空间 $\mathcal{S}$ 分解为有限个或可列个互不相交的子集

$$\mathcal{S} = \left(\bigcup_n C_n\right) \cup D$$

其中：

每个 C_n 是常返态构成的不可约闭集（从内部无法到达外部），称为基本常返闭集；

每个 C_n 的状态同属正常返态或零常返态，具有相同周期，且 $f_{ij} = 1$；

D 由全体非常返态构成，从 C_n 中无法进入 D。

若 $\mathcal{S}$ 为有限集，则 D 一定为非闭集，即系统最终一定进入常返闭集。

5.5. 极限分布

<u>转移概率的极限</u>

基本极限定理：若 i 是周期为 d 的常返态，则（$\mu_i = \infty$ 时为 0）

$$\lim_{n \to \infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i}$$

对于两个状态之间的转移概率，若 j 为非常返态或零常返态，则对任意的 $i \in \mathcal{S}$ 有

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(m)} = 0$$

若 j 正常返，该极限不一定存在。但对给定的 i 和 $0 \leq r \leq d - 1$，有

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(nd+r)} = \frac{d}{\mu_j} \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)}$$

或者可以考虑其 Cesaro 平均收敛性

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}=\begin{cases}0, & j \text{ transient or null recurrent}\\ f_{ij}/\mu_j, & j \text{ positive recurrent}\end{cases}$$

平稳分布和极限分布

平稳分布 π 是指满足

$$\pi=\pi\boldsymbol{P}$$

极限分布是指（若与 i 无关的极限存在）

$$\pi_j^*=\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\frac{1}{\mu_j}$$

对于不可约遍历链，极限分布就是平稳分布，且唯一。而对于非常返或零常返的不可约链，平稳分布不存在。

对于不可约遍历链，$\{\pi_i=1/\mu_i\}$ 是下面方程组的唯一解。

$$x_j=\sum_{i\in\mathcal{S}}x_ip_{ij},\qquad x>0,\sum_{i\in\mathcal{S}}x_i=1$$

对于一般的马尔可夫链，用 C_+ 表示全体正常返态的集合，则平稳分布存在的充要条件是 C_+ 非空，平稳分布唯一存在的充要条件为 C_+ 只包括一个基本常返闭集。

5.6. 马尔可夫链蒙特卡洛方法 (MCMC)

对于一个随机向量 $\boldsymbol{X}$，我们常常想要求其某个函数的期望 $\theta=\mathrm{E}(h(\boldsymbol{X}))$。蒙特卡洛方法是生成独立同分布的随机向量序列 $\{\boldsymbol{X}_n\}$，并依照强大数定律导出

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{h(\boldsymbol{X}_i)}{n}\xrightarrow{\text{a.s.}}\theta$$

但生成特定概率分布的随机向量并不简单（例如归一化因子难以计算，或维度之间相关等）。MCMC 试图生成以 $P(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}_i)$ 为平稳概率的马尔科夫链。当 $n\to\infty$ 时，$\boldsymbol{X}_n$ 的分布接近 $\boldsymbol{\pi}$，从而以上面相同的方式估计 θ。

6. 时间连续马尔可夫链

6.1. 时间连续马尔可夫链

时间连续马尔可夫链的指标集为 $T=[0,+\infty)$，但其状态空间 $\mathcal{S}$ 仍然是离散的。时间连续马尔可夫链对于任意 $0\le t_0\le t_1\le\cdots\le t_n\le t_{n+1}$，有

$$P[X(t_{n+1})=i_{n+1}|X(t_0)=i_0,X(t_1)=i_1,\cdots,X(t_n)=i_n]=P[X(t_{n+1})=i_{n+1}|X(t_n)=i_n]$$

记转移概率为

$$p_{ij}(s,t)=P[X(t+s)=j|X(s=i)]$$

若 $p_{ij}(s,t)$ 与 s 无关，称该马尔可夫链是时齐的，记转移概率为 $p_{ij}(t)$。本处只讨论时齐的连续时间马尔可夫链。

时间连续马尔可夫链的一条轨道是：X 在某个状态停留一段时间后，跳到另一个状态，再停留一段时间后再跳向第三个状态，如此进行下去。时间连续马尔可夫链具有无记忆性，即在每个状态停留的概率满足指数分布。

6.2. 转移概率与转移速率

时间连续马尔可夫链也有 C-K 方程

$$p_{ij}(s+t)=\sum_{k\in\mathcal{S}}p_{ik}(s)p_{kj}(t)$$

或矩阵形式

$$\boldsymbol{P}(s+t)=\boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{P}(t)$$

转移矩阵满足 $\boldsymbol{P}(0)=\boldsymbol{I}$ 且 $\boldsymbol{P}(t)$ 对于 t 一致连续。

为了得到与时间间隔无关的描述转移概率的量，定义转移速率矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{\boldsymbol{P}(t)-\boldsymbol{I}}{t}$$

$\boldsymbol{Q}$ 的对角元可以是 $-\infty$。当没有无穷时，称 $\boldsymbol{Q}$ 是保守的。当状态空间 $\mathcal{S}$ 有限时，$\boldsymbol{Q}$ 必保守。

其中 q_{ij} 是从状态 i 转移至状态 j 的速率。定义 $q_i=-q_{ii}$ 表示从状态 i 跳出的速率。

Kolmogorov 向前向后微分方程（第二条为向前方程，在状态有限或生灭过程中成立）

$$\begin{aligned}p'_{ij}(t)&=\sum_{k\neq i}q_{ik}p_{kj}(t)-q_{ii}p_{ij}(t)\\ p'_{ij}(t)&=\sum_{k\neq i}q_{kj}p_{ik}(t)-q_{jj}p_{ij}(t)\end{aligned}$$

或写成矩阵形式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}'(t)&=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}\\ \boldsymbol{P}'(t)&=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t)\end{aligned}$$

7. 鞅

7.1. 鞅的定义

鞅的概念来源于公平赌博，即资金期望不变化。随机过程 $\{X_n\}$ 满足以下条件则称为鞅

1. $\mathrm{E}(|X_n|)<\infty$；
2. $\mathrm{E}(X_{n+1}|X_0,X_1,\cdots,X_n)=X_n$，a.s.。

如果有另一随机过程 $\{Y_n\}$（例如代表每场赌博的输赢），X_n 是 $Y_0,\cdots,Y_n$ 的函数，则 $\{X_n\}$ 满足以下条件称为关于 $\{Y_n\}$ 是鞅

1. $\mathrm{E}(|X_n|)<\infty$；
2. $\mathrm{E}(X_{n+1}|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)=X_n$，a.s.。

有时引入记号 $\mathcal{F}_n=\sigma(Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)$，则也会说 $\{X_n\}$ 关于 $\{\mathcal{F}_n\}$ 是鞅。

对于鞅，$\mathrm{E}(X_{n+1})=\mathrm{E}(\mathrm{E}(X_{n+1}|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n))=\mathrm{E}(X_n)$，所以其期望在任何时刻均相等。

7.2. 上鞅/下鞅及分解定理

对于随机过程 $\{X_n\}$ 和 $\{Y_n\}$，$\{X_n\}$ 是 $\{Y_n\}$ 的函数，则 $\{X_n\}$ 满足以下条件称为关于 $\{Y_n\}$ 是上（下）鞅

1. $\mathrm{E}(\min(x,0))>-\infty$（$\mathrm{E}(\max(x,0))<+\infty$）；
2. $\mathrm{E}(X_{n+1}|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)\le X_n$（$\mathrm{E}(X_{n+1}|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)\ge X_n$。

上（下）鞅描述的是不利（有利）的非公平赌博。

下（上）鞅分解定理：下（上）鞅一定可以唯一地分解为一个鞅和一个增（减）过程之和。即对于任意一个 $\{X_n\}$ 关于 $\{Y_n\}$ 是下（上）鞅，则必存在唯一的分解 $X_n = M_n + Z_n$ 使得

1. $\{M_n\}$ 关于 $\{Y_n\}$ 是鞅；
2. Z_n 是 $Y_1, \cdots, Y_{n-1}$ 的函数，且 $Z_1 = 0$，Z_n 不减（增），且期望存在。

7.3. 停时定理

设 $\{M_n\}$ 关于 $\{X_n\}$ 是鞅，T 是停时且满足

1. $P[T < \infty] = 1$;
2. $\mathrm{E}(|M_T|) < \infty$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}(|M_n| \mathbb{I}_{\{t>n\}}) = 0$,

则有 $\mathrm{E}(M_T) = \mathrm{E}(M_0)$。

停时定理的意义是：在公平赌博中，无论你按照何种策略根据前面的结果决定停止时间，（在满足一定条件下）你都不可能赢。由于现实中赌博不可能无限进行下去，即停时是有界的，因此该条件自然满足。

7.4. 鞅收敛定理

设 $\{M_n\}$ 关于 $\{X_n\}$ 是（上/下）鞅，并且 $\sup \mathrm{E}(|M_n|) < \infty$，则存在随机变量 M_∞ 使得

$$M_n \xrightarrow{\text{a.s.}} M_\infty$$

即：有上界的下鞅收敛，有下界的上鞅收敛。

7.5. 连续鞅

定义在相同概率空间上的随机过程 $\{X(t)\}$ 若满足以下条件，则称 $\{X(t)\}$ 关于 $\{\mathcal{F}_t\}$ 是鞅

1. $\forall t, \mathrm{E}(|X(t)|) < \infty$;
2. $\forall s, t, \mathrm{E}(X(t+s)|\mathcal{F}_t) = X(t), \text{ a.s.}$;
3. $\forall t, X(t)$ 关于 $\mathcal{F}$ 是可测的。

同样可以定义连续时间的上鞅和下鞅。

连续鞅也满足上面的重要定理

- 期望不变：$\mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(X(0))$;
- 停时定理：若 τ 是有界停时，则 $\mathrm{E}(X(\tau)) = \mathrm{E}(X(0))$;
- 鞅收敛定理：若 $\sup \mathrm{E}(|X_n|) < \infty$，则存在 X_∞ 使得 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X_\infty$。

8. 布朗运动

8.1. 布朗运动的定义

Brown 运动又称为 Wiener 过程，是对称随机游走的连续化。其定义为

1. $\{B(t)\}$ 有独立增量；
2. 对每个 $t > 0$，$B(t) - B(0)$ 服从正态分布 $\mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$。

一个等价定义是

1. 正态增量：$B(t+s) - B(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 s)$;
2. 独立增量：$B(t) - B(s)$ 独立于过去的 $B(u), u \leq s$;
3. 连续性：$B(t)$ 是 t 的连续函数。

当 $B(0)=0$ 且 $\sigma=1$ 时，称为标准布朗运动。

8.2. 布朗运动的基本性质

- 布朗运动的马尔可夫性

  布朗运动不但具有马尔可夫性，还具有强马尔可夫性。
- 布朗运动的鞅性

  布朗运动 $\{B(t)\}$ 是鞅，$\{B^2(t)-t\}$ 也是鞅。
- 布朗运动的路径性质

  对于一个布朗运动，其几乎所有路径 $b(t)$ 都满足

  1. 在任何区间都不单调；
  2. 在任何点都不可微；
  3. 在任何区间上都不是有界变差的，即对任意一个区间分割 $t_0<t_1<\cdots<t_n$ 有
  $$\lim_{\lambda\to 0}\sum_i |b(t_i)-b(t_{i-1})|=\infty$$
  4. 对于任何 t，路径在 $[0,t]$ 上的二次变差为 t，即对任意一个分割 $0=t_0<\cdots<t_n=t$ 有
  $$\lim_{\lambda\to 0}\sum_i |b(t_i)-b(t_{i-1})|^2=t$$
- 布朗运动的正态性

  正态过程（Gauss 过程）是指任意有限维分布都是正态分布的随机过程。

  布朗运动是期望 $\mathrm{E}(B(t))=0$、协方差 $\gamma(t,s)=\min(t,s)$ 的正态过程。

8.3. 首中时与零点

<u>首中时</u>

以 T_x 表示布朗运动首次击中 x 的时间，即 $T_x=\inf\{t|B(t)=x\}$。那么有

$$P[T_x\le t]=2-2\Phi\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)$$

T_x 的两条重要性质是，对于 $\forall x$，有 $P[T_x<\infty]=1$，但 $\mathrm{E}(T_x)=\infty$。

<u>零点</u>

布朗运动的反正弦律是指，$B(t)$ 在 (t_1,t_2) 上没有零点的概率是

$$P[B(t)\neq 0,t_1<t<t_2]=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}$$

这是一个很有趣的结论，即在 (t_1,t_2) 上有没有零点的概率与 t_2-t_1 无关，与 t_2/t_1 有关。

8.4. 布朗运动的推广

<u>布朗桥</u>

布朗桥是给定 $B(0)=B(1)=0$ 的 $t\in[0,1]$ 的布朗运动。其定义为

$$B^*(t)=B(t)-tB(1),\quad 0\le t\le 1$$

布朗桥的分布与给定 $B(1)=0$ 的布朗运动的条件分布相同。

<u>有吸收值的布朗运动</u>

若 x 处的首中时为 T_x，则在 x 处被吸收的布朗运动是指

$$Z(t)=\begin{cases}B(t), & t<T_x\\ x, & t\geq T_x\end{cases}$$

其概率分布为

$$\begin{cases}P[Z(t)=x]=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_x^{+\infty}\exp(-\frac{u^2}{2t})\mathrm{d}u,\\ P[Z(t)\leq y]=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{y-2x}^{y}\exp(-\frac{u^2}{2t})\mathrm{d}u, \quad y<x\end{cases}$$

在原点反射的布朗运动

定义为 $Y(t)=|B(t)|$。其分布函数非常简单，即 $P[Y(t)\leq y]=P[-y\leq B(t)\leq y]$。

几何布朗运动

定义为 $X(t)=\mathrm{e}^{B(t)}$。几何布朗运动描述的是相对变化为独立同分布的模型。例如，若随机变量 $X(t)$ 满足 $\frac{X(n\Delta t)}{X((n+1)\Delta t)}$ 独立同分布，则当 $\Delta t\to 0$ 时，$X(t)$ 可以描述为几何布朗运动。

几何布朗运动满足 $\mathrm{E}(X(t))=\mathrm{e}^{t/2}$，$\mathrm{Var}(X(t))=\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}$。

漂移布朗运动

$\{B(t)+\mu t\}$ 称为漂移系数为 μ 的布朗运动。它是不对称随机游走的连续化。

在漂移布朗运动中，很有用的一个量是，起始于 x，先击中 a 再击中 $-b$ 的概率（$a,b>0$）

$$P[T_a<T_{-b}<\infty|X(0)=x]=\frac{\mathrm{e}^{2\mu b}-\mathrm{e}^{-2\mu x}}{\mathrm{e}^{2\mu b}-\mathrm{e}^{-2\mu a}}$$

9. 随机微积分

9.1. L^2 空间上的分析

定义所有二阶矩存在的随机变量构成的集合为 L^2 空间。其上内积定义为 $(X,Y)=\mathrm{E}(XY)$（复数则定义为 $(X,Y)=\mathrm{E}(X\bar{Y})$）。从而可以定义范数 $||X||=\sqrt{(X,X)}$ 和距离 $d(X,Y)=||X-Y||$。

在此基础上，可以定义分析学的概念。对于随机变量序列 $\{X_n\}$，若 $d(X_n,X)\to 0, n\to\infty$，则称 X 是序列 $\{X_n\}$ 的均方极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n\overset{L^2}{=}X$。$L^2$ 空间的柯西序列必收敛，因此 L^2 空间是一个完备的欧氏空间。

连续的二阶矩过程（即 $\forall t, X(t)\in L^2$ 的过程）相当于 L^2 空间中的一条曲线。我们可以对随机过程定义分析学性质。

- 均方连续

  $$\lim_{t\to t_0}X(t)\overset{L^2}{=}X(t_0)$$

  $\{X(t)\}$ 在 t_0 处均方连续的充要条件是自相关函数 $R_X(s,t)=(X(s),X(t))$ 在 (t_0,t_0) 处连续。

- 均方导数

  $$\lim_{h\to 0}\frac{X(t_0+h)-X(t_0)}{h}\overset{L^2}{=}X'(t_0)$$

  均方可导的充要条件是 $R_X(s,t)$ 在 (t_0,t_0) 处广义二次可微，即下式的极限存在

  $$\lim_{\substack{h\to 0\\ l\to 0}}\frac{R_X(t_0+h,t_0+l)-R_X(t_0+h,t_0)-R_X(t_0,t_0+l)+R(t_0,t_0)}{h\cdot l}$$

- 均方积分：若 $f(t)$ 是 T 上的函数，$X(t)$ 是 T 上的二阶矩过程，则与黎曼积分进行相同的分割、取点、最大长度趋于 0 的过程，若极限存在，则称为黎曼均方积分

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_k f(u_k)X(u_k)\Delta t_k \overset{L^2}{=} \int_a^b f(t)X(t)\mathrm{d}t$$

均方可积的一个充分条件是 $\int_a^b\int_a^b f(s)f(t)R_X(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$ 存在。

这些均方分析性质与普通函数的分析学性质有很多类似之处。

- 均方导数的性质：
  1. 可导则连续；
  2. 导数具有线性性；
  3. $(f(t)X(t))' = f'(t)X(t) + f(t)X'(t)$；
  4. $\mathrm{E}(X'(t)) = (\mathrm{E}(X(t)))'$；
  5. $\mathrm{E}(X'(s), X'(t)) = \frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R_X(s,t)$。
- 均方积分的性质：
  1. 线性性和区间可加性；
  2. 闭区间上 $X(t)$ 均方连续则均方可积；
  3. 若 $Y(t) = \int_a^t X(u)\mathrm{d}u$，则 Y 均方可导，且 $Y'(t) = X(t)$；

     $X(t)$ 均方可导，$X'(t)$ 均方连续，则 $X(b) - X(a) = \int_a^b X'(t)\mathrm{d}t$；
  4. $\mathrm{E}\left(\int_a^b f(t)X(t)\mathrm{d}t\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{E}(X(t))\mathrm{d}t$。

9.2. Itô 积分

在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上，我们希望定义一个随机过程的函数 $f(t,\omega)$ 关于布朗运动 $B(t,\omega)$ 的积分。当 $f(t,\omega)$ 满足以下条件时，这种积分是可以恰当定义的。满足这些条件的集合记作 $L^2(T)$。

1. $f(t,\omega)$ 关于 $\mathcal{B}(T)\times\mathcal{F}$ 可测，即对 $\forall t, \forall A\in\mathcal{B}(T)$，有 $\{\omega\in\Omega | f(t,\omega)\in A\}\in\mathcal{F}$；
2. $\forall t$，有 $f(t,\cdot)$ 关于 $\mathcal{F}_t$ 可测，其中 $\{\mathcal{F}_t\}$ 是 σ 代数流，即 $f(t,\cdot)$ 完全由 t 时间及之前的状态决定；
3. $\mathrm{E}(\int_T f(t,\omega)^2\mathrm{d}t) < \infty$。

$L^2(T)$ 上的随机过程都可以由简单过程进行二阶矩逼近。对于简单过程（ξ_i 是随机变量）

$$\phi(t) = \xi_0\mathbb{I}_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1}\xi_i\mathbb{I}_{(t_i,t_{i+1}]}(t)$$

此时 Itô 积分定义为（注意结果是一个随机变量）

$$\int_0^T \phi(t)\mathrm{d}B(t) = \sum_{i=1}^{n-1}\xi_i(B(t_{i+1}) - B(t_i))$$

若随机过程 $f(t)$ 可以由一个简单过程序列 $\{\phi_n(t)\}$ 二阶矩逼近，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \mathrm{E}(\phi_n(t) - f(t))^2\mathrm{d}t = 0$$

则 $f(t)$ 的 Itô 积分定义为简单过程的积分在均方收敛意义下的极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \phi_n(t)\mathrm{d}B(t) \overset{L^2}{=} \int_0^T f(t)\mathrm{d}B(t)$$

9.3. Itô 积分的性质

<u>Itô 积分的基本性质</u>

- 线性性与区间可加性（与 R-S 积分相同）
- 零期望

$$\mathrm{E}\left(\int_0^T f(t)\mathrm{d}B(t)\right)=0$$

- 方差

$$\mathrm{Var}\left(\int_0^T f(t)\mathrm{d}B(t)\right)=\int_0^T \mathrm{E}(f^2(t))\mathrm{d}t$$

Itô 积分过程

Itô 积分的变上限积分定义了一个随机过程

$$Y(t)=\int_0^t X(s)\mathrm{d}B(s)$$

其重要性质包括

- $\{Y(t)\}$ 是零均值的连续鞅；
- 鞅表示定理（上面一条的逆命题）：若 $\{Y(t)\}$ 是鞅，$Y(t)\in L^2(T)$，则必存在唯一的过程 $X(t)\in L^2(T)$ 使得，对任意 $t_1,t_2\in T$，有

$$Y(t_2)-Y(t_1)=\int_{t_1}^{t_2} X(s)\mathrm{d}B(s)$$

- 若 X 是非随机的 t 的函数，且 $\int_0^T X^2(s)\mathrm{d}s<\infty$，则 $\{Y(t)\}$ 是高斯过程。
- $Y(t)$ 在 $[0,t]$ 上的二次变差为

$$[Y,Y](t)=\int_0^t X^2(s)\mathrm{d}s$$

9.4. Itô 公式

Itô 公式相当于随机分析中的链式求导法则：若 f 是二次连续可微的函数，则对于任意 t 有

$$\mathrm{d}f(B(t))=f'(B(t))\mathrm{d}B(t)+\frac{1}{2}f''(B(t))\mathrm{d}t$$

或积分形式

$$f(B(t))=f(0)+\int_0^t f'(B(s))\mathrm{d}B(s)+\frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))\mathrm{d}s$$

更一般地，如果我们定义 Itô 过程（即漂移-扩散过程），其中随机过程 $\sqrt{\mu(t)},\sigma(t)\in L^2(T)$

$$\mathrm{d}X(t)=\mu(t)\mathrm{d}t+\sigma(t)\mathrm{d}B(t)$$

而若想要求 t 和 $X(t)$ 的函数 $f(t,x)$，则 f 仍然是 Itô 过程，且有

$$\mathrm{d}f=\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\mu\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}t+\sigma\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}B$$

Itô 公式可以用于计算与布朗运动有关的积分式。

9.5. 随机微分方程

形如

$$\mathrm{d}X(t)=\mu(t,X(t))\mathrm{d}t+\sigma(t,X(t))\mathrm{d}B(t)$$

的方程称为随机微分方程 (SDE)。

解的存在唯一性定理

若 $\mu(t,x),\sigma(t,x):[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足

1. 可测性：$\mu, \sigma \in L^2([0,T] \times \mathbb{R})$；
2. Lipschitz 条件：存在常数 $M > 0$ 使得对 $\forall t \in [0,T], \forall x, y \in \mathbb{R}$，有
$$|\mu(t,x) - \mu(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| < M|x-y|$$
3. 线性增长有界：存在常数 $K > 0$ 使得对 $\forall t \in [0,T], x \in \mathbb{R}$ 有
$$|\mu(t,x)| + |\sigma(t,x)| \le K(t + |x|)$$
4. 初始条件：$X(t_0)$ 关于 $\mathcal{F}_{t_0}$ 可测，且 $\mathrm{E}(X(t_0)^2) < \infty$

则存在唯一的连续路径随机过程 $\{X(t), t \ge t_0\}$ 满足该方程，且 $\{X(t)\} \in L^2(t_0, T)$。

9.6. SDE 应用举例

- Ornstein–Uhlenbeck (OU) 过程

  OU 过程在包括计算神经科学内的许多领域中都很常用。其方程为
  $$\mathrm{d}X(t) = -\mu X(t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B(t)$$
  由于布朗运动的变差是白噪音，因此该方程可以化做以下形式，称为 Langevin 方程。其中 ξ 是白噪音。
  $$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = -\mu X(t) + \sigma \xi(t)$$
  其密度函数 $P(x,t)$ 满足 Fokker–Planck 方程
  $$\frac{\partial P}{\partial t} = \mu \frac{\partial (xP)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$
  OU 过程是一个平稳的马尔可夫过程，同时也是高斯过程。其解为
  $$X(t) = X(0)\mathrm{e}^{-\mu t} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\mu}}\mathrm{e}^{-\mu t} B(\mathrm{e}^{2\mu t} - 1)$$

- Black-Scholes 期权定价公式

  金融中的 Black-Scholes 期权定价公式非常有名。设股票的价格为随机过程 S_t，期望收益率为 b，波动率为 σ，则 S_t 应满足 SDE
  $$\mathrm{d}S_t = bS_t\mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}B_t$$
  给定初始变量 S_0 时，此方程的解为带有漂移项的几何布朗运动（但后面不直接用这个解）
  $$S_t = S_0 \exp\left(\left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)$$
  若期权价格为时间和股票价格的函数 $V(t, S_t)$，根据 Itô 公式展开
  $$\mathrm{d}V = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + bS_t\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\sigma^2}{2}S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right)\mathrm{d}t + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t}\mathrm{d}B_t$$
  若卖出方在 t 时刻每卖出 1 份期权就买入 δ 份股票进行对冲，即投资组合 $\Pi_t = \delta S_t - V(t, S_t)$，则其价值增量应为
  $$\begin{aligned}\mathrm{d}\Pi_t &= \delta \mathrm{d}S_t - \mathrm{d}V(t,S_t) \\ &= \left(-\frac{\partial V}{\partial t} + bS_t\left(\delta - \frac{\partial V}{\partial S_t}\right) - \frac{\sigma^2}{2}S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right)\mathrm{d}t + \sigma S_t\left(\delta - \frac{\partial V}{\partial S_t}\right)\mathrm{d}B_t\end{aligned}$$
  要求收益是无风险的，即 $\mathrm{d}B_t$ 项应为 0，所以 $\delta = \partial V/\partial S_t$，带入可得
  $$\mathrm{d}\Pi_t = \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right)\mathrm{d}t$$
  无风险时，收益必等于无风险利率 r 所造成的收益，即 $\mathrm{d}\Pi_t = r\Pi_t dt$，将此带入上式，同时带入无风险的 Π_t ，即可得到最终的 Black-Scholes 方程

$$\frac{\partial V}{\partial t}+rS_t\frac{\partial V}{\partial S_t}+\frac{\sigma^2}{2}S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}-rV=0$$

这个结果很有趣的是，它与 b 和 σ 都无关。在一些经典的期权中该方程有解析解，即为 Black-Scholes 期权定价公式。